

PROPOSITION D'UN MODELE NON LINÉAIRE DE COMPORTEMENT DU BÉTON EN COMPRESSION ET EN TRACTION

I. Introduction

L'utilisation de technique numériques d'analyse non linéaire pour l'étude et la conception des différents éléments de structure du béton conduit à une modélisation d'application simple du comportement des matériaux.

Pour le béton, matériau homogène, nombre de formules ont été proposées pour traduire son comportement (contrainte-déformation), mais la plupart présentent un ou plusieurs inconvénients dont les plus importants sont :

- Discontinuité : les formulations de P.T. WANG [1], de D. DARWIN [2], de K.J. THOMSON [3] et de R. PARK [4] diffèrent d'une branche de la courbe à l'autre.
- Absence du point d'inflexion et une partie décroissante assez longue étant deux caractéristiques du comportement du béton (J.TUSET [5], P.DESAYI [6] et CEIB [7]).
- Formules ne dépendant que des propriétés de la seule branche ascendante (S. POPOVIC [8] et P. DESAYI [9]).

- Formule contenant des paramètres empiriques pour ajuster une courbe donnée. Ces paramètres n'étant pas liés aux propriétés physiques du béton dont les effets sont directement mesurables.

- Formules ne traduisant qu'un seul des deux types d'essai, soit essai de compression, soit celui de traction.

Il nous a semblé plus approprié de définir des formules analytiques à l'aide de constantes pouvant être évaluées uniquement à partir de paramètres physiques fondamentaux de la courbe contrainte - déformation. De plus, il serait préférable que ces paramètres fondamentaux soient exprimés en fonction des propriétés des matériaux et obtenus facilement à partir de résultats expérimentaux telle la contrainte de compression maximale sur cylindre normalisé.

Le modèle que nous proposons tient compte de tous les inconvénients cités plus haut et est basé sur les résultats d'essais de compression et de traction présentés dans ce qui suit.

2. Etude expérimentale du comportement du béton

Tous les essais de cette étude ont été réalisés dans le laboratoire de béton de l'ENSM de

Nantes (France). La presse utilisée a été équipée d'une cellule et d'un dispositif d'acquisition des mesures [10] permettant de décrire le comportement du béton dans sa phase de post-rupture (branche descendante de la courbe contrainte-déformation).

Les essais ont été réalisés sur les éprouvettes normalisées 16 x 32, de différents dosages.

Le tableau qui suit présente le mélange pondéral par m³ selon la méthode de composition de VALETTE.

| Dosage en Kg de ciment CPJ 45 | Graviers concassés 5/12/20 | Sable de Loire tamisé | E/C (en poids) |
|-------------------------------|----------------------------|-----------------------|----------------|
| 1 250 | 900 | 750 | 0,5 |
| 2 300 | 924 | 690 | 0,5 |
| 3 350 | 924 | 690 | 0,5 |
| 4 400 | 972 | 616 | 0,5 |

Les courbes granulométriques des granulats utilisés (sable de Loire et graviers concassés) sont données à la figure 1 qui suit.

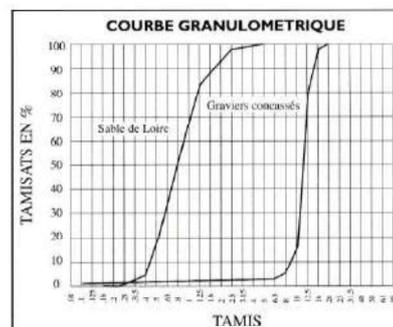


Figure 1 : Courbes granulométriques

2.1. Résultats des essais en compression simple

Nous avons effectué 4 dosages différents et réalisé 10 essais pour chacun d'eux. Pour chaque essai nous avons enregistré la courbe contrainte-déformation jusqu'à près de 5‰ (figure 2), relevé la contrainte de compression maximale (F_c), la déformation correspondante (ϵ_n) le mo-

M.L BENMALEK
Centre Universitaire
de Guelma
B. ALSULAYFANI
ENSM de Nantes (France)

RÉSUMÉ

Cet article présente un modèle mathématique non linéaire de comportement du béton en compression et en traction. Ce modèle original, simple, valide pour les bétons courants de résistances comprises entre 20 et 50 MPa comporte un minimum de paramètres, tous liés aux propriétés physiques du béton.

L'étude expérimentale menée dans la perspective de déterminer ces propriétés physiques a été réalisée à partir d'échantillons normalisés de béton de différents dosages. Elles a nécessité l'élaboration d'un montage spécial permettant d'enregistrer la branche descendante de la courbe contrainte-déformation. Les principaux résultats obtenus sont présentés et analysés.

A partir des résultats de cette étude expérimentale, le modèle proposé a été développé. Outre sa simplicité, il a l'avantage d'être unique pour la compression et pour la traction.

MOTS CLÉS

Modèle • béton • comportement • compression • traction.

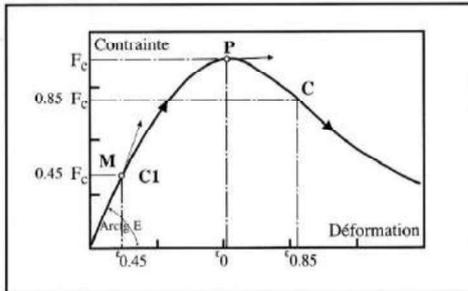


Figure 2 : Schéma montrant les différents paramètres mesurés

Figure 3 : Déformation au pic en fonction de la contrainte maximale de compression

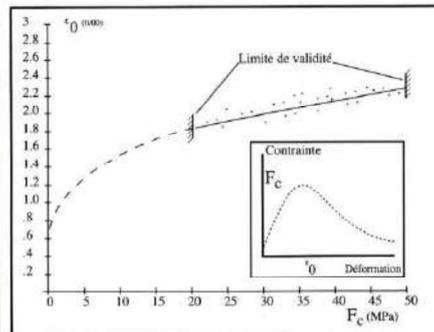
Figure 4 : Module sécant pour 0.45F_c en fonction de la contrainte maximale de compression

dule sécant ($E_{0.45}$) pour la valeur de la contrainte égale à $0.45 F_c$ ainsi que la déformation ($\epsilon_{0.85}$) correspondant à la valeur de la contrainte égale à $0.85 F_c$ dans la branche descendante.

2.1.1. Déformation correspondant à la contrainte maximum (déformation au pic)

La figure 3 montre que la déformation au pic augmente avec la contrainte maximum de l'échantillon. La courbe obtenue par un ajustement avec un coefficient de corrélation de 0.855 correspond à la relation suivante :

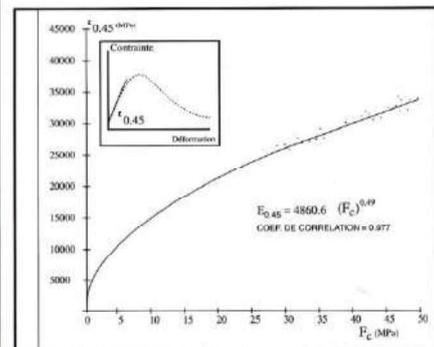
$$\epsilon_0 = 0.00085 F_c^{0.246} \quad (F_c \text{ en MPa})$$



2.1.2 Module sécant pour 0.45 F_c

Le module sécant pour $0.45 F_c$ croît avec la contrainte maximum de compression (figure 4). La courbe obtenue par un ajustement avec un coefficient de corrélation de 0.977 permet d'écrire la relation empirique suivante :

$$E_{0.45} = 4860.6 F_c^{0.49} \quad (F_c \text{ en MPa})$$



2.1.3 Déformation correspondant à 0.85 F_c de la branche descendante de la courbe

Cette déformation notée $\epsilon_{0.85}$ décroît de façon linéaire avec la contrainte maximum de compression (fig 5). La droite de régression obtenue peut être écrite sous forme de :

$$\epsilon_{0.85} = (1.679 - 0.008F_c) \epsilon_0 \quad (F_c \text{ en MPa})$$

et (coef de corrélation = 0.995).

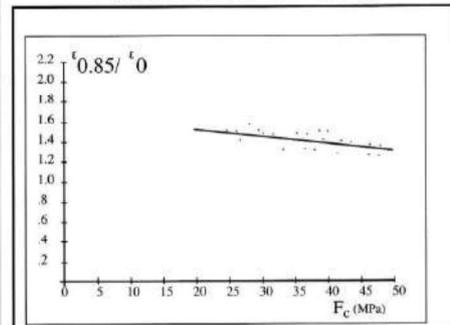


Figure 5 : Déformation à $0.85F_c$ en fonction de la contrainte maximale en compression.

2.2 Résultats des essais en traction simple

Les essais de traction directe effectués sur 8 échantillons de différentes compositions ont permis de dégager les résultats suivants :

2.2.1 Relation contrainte déformation

L'allure de la courbe contrainte-déformation ressemble à celle des courbes contrainte-déformation du béton comprimé comme le suggère l'exemple de la figure 6.

- une première zone linéaire jusqu'à 50 à 60% de la contrainte maximale (zone élastique).
- une deuxième zone dans laquelle se produit un fléchissement progressif jusqu'à atteindre la contrainte maximale; ce fléchissement pouvant être justifié par l'apparition des premières micro-fissures et leur propagation (zone élastoplastique).
- une troisième zone dans laquelle la branche est à décroissance rapide jusqu'à rupture complète (zone plastique).

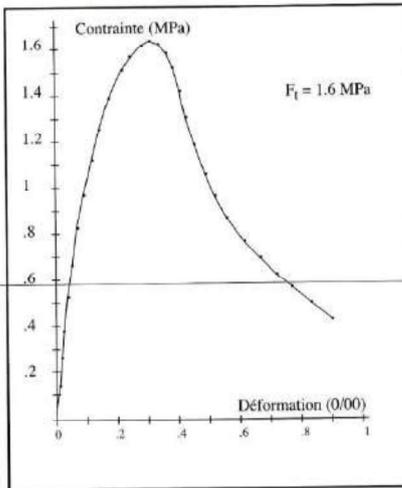
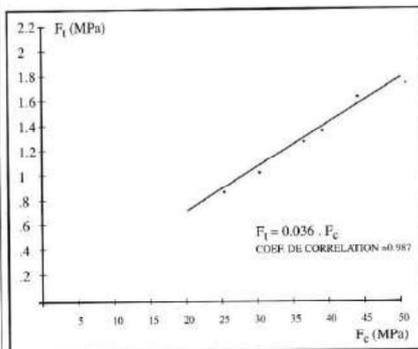


Figure 6 : Résultat expérimental (contrainte-déformation)

2.2.2 Relation contrainte maximale en traction-contrainte maximale en compression

La contrainte maximale de traction enregistrée semble proportionnelle à la contrainte maximale de compression (figure 7). La relation mathématique pouvant les lier peut s'écrire, à un coefficient de corrélation de 0.987, de la façon suivante :

$$F_t = 0.036 F_c$$

Figure 7 : Relation $F_t = f(F_c)$

2.3 Déformation au pic correspondant à la contrainte maximale :

La déformation au pic varie linéairement de 250×10^{-6} à 380×10^{-6} pour des contraintes maximales de traction comprises entre 0.8 et 2 Mpa (figure 8). Cette variation linéaire peut être exprimée avec un coefficient de corrélation de 0.887 par la formule :

$$\varepsilon_t (\%) = 0.198 - 0.075 F_t \quad (F_t \text{ en MPa})$$

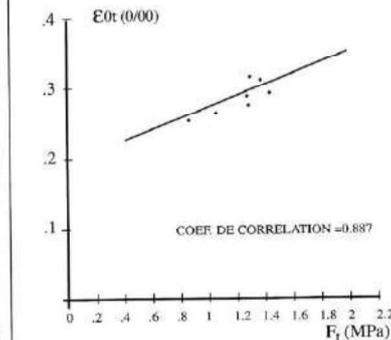


Figure 8 : Déformation au pic en fonction de la contrainte maximale de traction

3. Modélisation

3.1 Béton en compression

$$\bar{\sigma} = \frac{A_c \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}^3 + B_c \bar{\varepsilon}^2 + C_c \bar{\varepsilon} + D_c} \quad (1)$$

où :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{F_c}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

avec F_c : contrainte maximale de compression du béton.

ε_0 : déformation au pic de contrainte F_c

Les quatre coefficients (A_c , B_c , C_c , D_c) sont déterminés par 4 conditions de passage imposées à partir de 3 points dans le modèle graphique décrit dans la figure 9, avec rappel de l'évolution des paramètres physiques principaux

- **Point M** : caractérisant le module sécant de déformation défini pour $0.45 F_c$

$$\text{coordonnés : } \begin{cases} \varepsilon_{0,45} \\ \sigma_{0,45} = 0.45 F_c \end{cases} \quad (\text{condition C1})$$

avec le module sécant $E_{0,45} = 4860.6 F_c$. (2)

- **Point P** : caractérisant la contrainte maximale en compression.

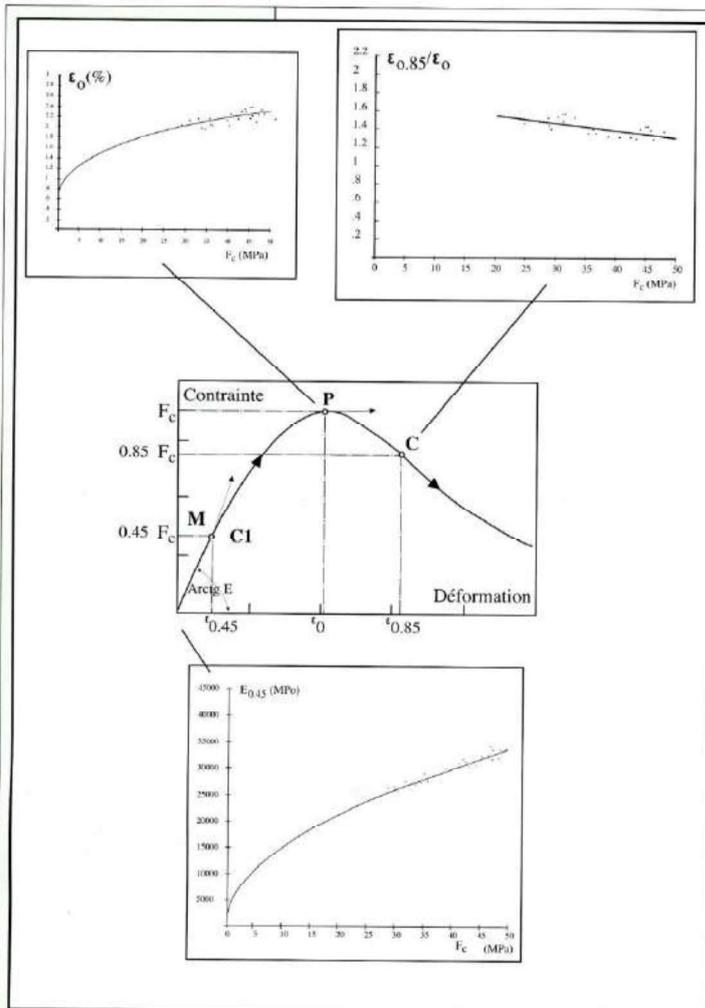


Figure 9 : Modélisation de la courbe contrainte-déformation du béton en compression.

coordonnés :
$$\begin{cases} \epsilon_0 = 0.00085 F_c^{0.246} & \text{(condition C2)} \\ \sigma_0 = F_c \end{cases}$$

avec la condition supplémentaire de tangente horizontale :

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0 \quad \text{(condition C3)}$$

• Point C : caractérisant la branche descendante

coordonnés
$$\begin{cases} \epsilon_{0,85} - (1.679 - 0.008 F_c) \epsilon_0 & \text{(condition c4)} \\ \sigma_{0,85} = 0.85 F_c \end{cases}$$

Pratiquement, la détermination des paramètres (A_c, B_c, C_c, D_c) s'effectue par la résolution du système linéaire de 4 équations à 4 inconnues tra-

$$\begin{bmatrix} (\bar{\epsilon}_{0,45})^3 & (\bar{\epsilon}_{0,45})^2 & (\bar{\epsilon}_{0,45}) & 1 \\ (\bar{\epsilon}_0)^3 & (\bar{\epsilon}_0)^2 & (\bar{\epsilon}_0) & 1 \\ (\bar{\epsilon}_{0,85})^3 & (\bar{\epsilon}_{0,85})^2 & (\bar{\epsilon}_{0,85}) & 1 \\ 2(\bar{\epsilon}_0) & (\bar{\epsilon}_0)^2 & (0) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{\epsilon}_{0,45}) | (\bar{\sigma}_{0,45}) \\ (\bar{\epsilon}_0) | (\bar{\sigma}_0) \\ (\bar{\epsilon}_{0,85}) | (\bar{\sigma}_{0,85}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \frac{1}{\beta_1}; B_c = \frac{1}{\beta_2}; C_c = \frac{1}{\beta_3}; D_c = \frac{1}{\beta_4}$$

d'où :

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\epsilon}}{\beta_1 \bar{\epsilon}^3 + \beta_2 \bar{\epsilon}^2 + \beta_3 \bar{\epsilon} + \beta_4} \quad (5)$$

duite par la relation matricielle qui suit :

Les critères de passage mentionnés correspondent tous aux résultats expérimentaux présentés plus haut. Après substitution de ces valeurs, la

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1.08 F_c^{0.26}}{1000}\right)^3 & \left(\frac{1.08 F_c^{0.26}}{1000}\right)^2 & \left(\frac{1.08 F_c^{0.26}}{1000}\right) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1.679 - 0.008 F_c)^3 & (1.679 - 0.008 F_c)^2 & (1.679 - 0.008 F_c) & 1 \\ 2 & 1 & (0) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1.08 F_c^{0.26}}{4500}\right) \\ 1 \\ \frac{(1.679 - 0.008 F_c)}{0.85} \\ 0 \end{bmatrix}$$

relation matricielle devient :

Ce système montre que les paramètres A_c, B_c, C_c et D_c dépendent directement de F_c , ce qui indique que la seule donnée nécessaire à l'identification des paramètres en compression est la connaissance de la résistance maximale sur cylindre.

La Figure 10 montre l'évolution de ces paramètres avec la résistance maximale du béton en compression F_c .

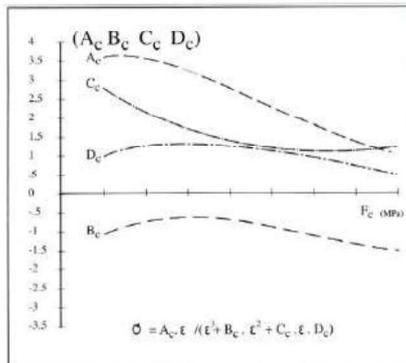


Figure 10 : Evolution des paramètres A_c , B_c , C_c et D_c

3.2 Béton en traction

Le comportement du béton en traction est décrit à partir d'une expression de même nature que celle proposée en compression :

$$\bar{\sigma} = \frac{A_t \cdot \bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}^3 + B_t \bar{\epsilon}^2 + C_t \bar{\epsilon} + D_t} \quad (6)$$

où : $\bar{\sigma}_t = \frac{\sigma}{F_t}$ et $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_{0t}}$

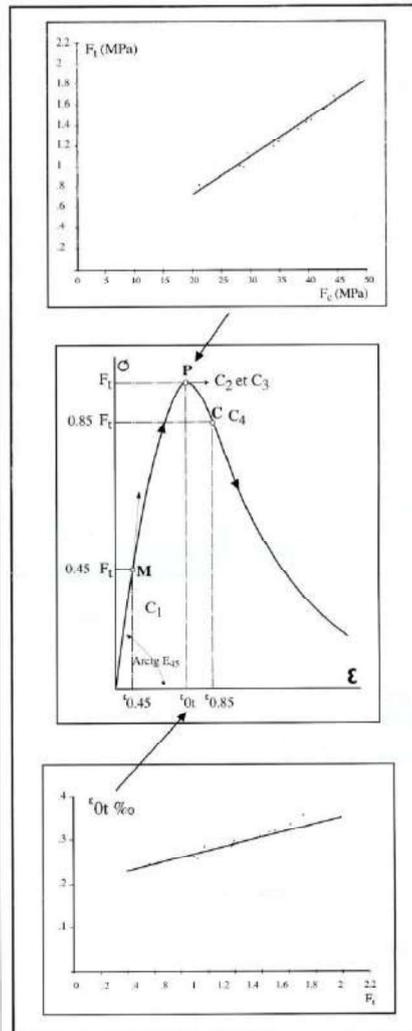
avec : F_t = contrainte maximale du béton en traction

ϵ_{0t} = déformation au pic de contrainte F_t

Les 4 coefficients (A_t , B_t , C_t , D_t) sont déterminés par 4 conditions de passage imposées à partir des 3 points M, P et C (figure 11). Cette figure est complétée par les relations expérimentales liant les principaux paramètres physiques.

• Point M :

coordonnés : $\begin{cases} \epsilon_{0.45} \\ \sigma_{0.45} = 0,45 F_t \end{cases}$ (condition C1)



avec $\epsilon_{0.45} = 0,27 \epsilon_{0t}$ (7)

• Point P :
coordonnés : $\begin{cases} \epsilon_{0t} (\%) = 0,198 + 0,075 F_t \\ F = 0,036 F_t^2 \end{cases}$ (condition C2)
avec la condition supplémentaire de tangente

Figure 11 : Modélisation de la courbe contrainte-déformation du béton en traction

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.T.WANG, SHAH et A.E. NAAMAN. Stress-strain curves of normal and lightweight concrete in compression. *ACI Journal*, p 603-610 nov 1978.
- [2] D. DARWIN et D.A. PACKNOLD. Non linear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the engineering mechanics division*, p. 229-241 1977.
- [3] K.J. THOMPSON et R. PARK. Moment-curvature behaviour of cyclical loaded structural concrete. *Proc. Int. Civ. Engers. Part 2*. June. p 317-341 1980.
- [4] R. PARK, D.C. KENT et SAMDSON. Reinforced concrete members with cyclic loading. *Journal of structural division, A.S.C.E. Vol 98 n° ST7, Proc paper 9011*. p 1341-1380 July 1972.
- [5] J.TUSET. modification du comportement des structures en béton armé par prise en



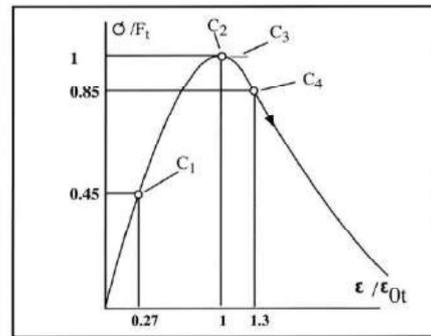


compte de la résistance en traction du béton. Thèse de doctorat d'état. Université Claude Bernard INSA de Lyon. Mai 1980 [6] P.DESAYI, K.T. SUNDRA and T.SANJEEVA. Equitation for stress-strain curves of concrete confined in circular steel spiral. Matériaux et construction n°65- sept - oct 1978. [7] CEIB. Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. Bulletin d'information n° 124. vol 1 et 2. Avril 1978 [8] S. POPOVIC. A review of stress-strain relationship for concrete. ACI Journal, Title n°67-14, p 243-248 march 1970. [9] P. DESAYI, K.T.S.R. LYENGAR and T.S. READY. Stress-strain characteristics of reinforcing steel bars under cyclic loading. American society for testing and materials. Journal of testing and evaluation. 1979. [10] M.L. BENMALEK. Mise au point d'une cellule C.T. Contribution à l'étude du béton durci sous chargement lentement variable. DEA soutenu le 3 octobre 1984 à L'ENSM de Nante, France.

horizontale : $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$ (condition C3)

• Point C :
 coordonné : $\begin{cases} \varepsilon_{0.85} = 1.3 \varepsilon_{0\sigma} \\ \sigma_{0.85} = 0.85 F_t \end{cases}$ (8) (condition C4)

De plus, il est possible dans ce cas d'exprimer la formulation correspondante à cette représentation



tion sous forme addimensionnelle comme l'indique la relation matricielle qui suit et le graphe de la figure 12.

Figure 12 : Représentation adimensionnelle de la loi $\sigma = f(\varepsilon)$ en traction

$$\begin{bmatrix} (0.27)^3 & (0.27)^2 & (0.27) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1.3)^3 & (1.3)^2 & (1.3) & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27/0.45 \\ 1 \\ 1.3/0.85 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système linéaire de 4 équations à 4 inconnues

$$\begin{aligned} A_t &= \text{---} \\ B_t &= \text{---} \\ C_t &= \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 1.277 \\ D_t &= \text{---} \end{aligned}$$

est traduit par la relation matricielle suivante liant les paramètres réduits :
 d'où :

Cela met en évidence que les paramètres A, B, C, et D, de notre modèle pour la traction du béton sont indépendants de F_t .

Ce résultat plus simple qu'en compression s'explique par le fait qu'on a pu admettre une modélisation plus élémentaire, en particulier pour tenir compte du module du béton en traction.

Donc :

$$\bar{\sigma}_t = \frac{1.09 \bar{\varepsilon}_t}{\bar{\varepsilon}_t^3 - 1.398 \bar{\varepsilon}_t^2 + 1.277 \bar{\varepsilon}_t + 0.411} \quad (9)$$

avec :

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{F_t} \text{ et } \bar{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{0t}}$$

4. Conclusion

Cette étude expérimentale et théorique (modélisation) nous permet de dégager les originalités et avantages du modèle proposé :

- 1- Unicité de la formule mathématique en compression et en traction.
- 2- Formulation mathématique continue sur le domaine, avec inflexion sur la branche descendante $\varepsilon \in [0, +\infty[$, donc possibilité de développements analytiques sans discontinuité.
- 3- La connaissance de la résistance à la compression à partir de l'essai normalisé sur cylindre est la seule donnée nécessaire à l'identification des paramètres en compression et en traction.
- 4- Ce modèle simple mais réaliste peut être complété afin de permettre son utilisation pour des bétons confinés (en triaxial) en trouvant la relation entre le degré de confinement et la déformation à partir d'essais sur divers types de bétons. ■